Μάθημα 13ο /

24/11/2017

Έχω τον περιορισμό $\langle , \rangle_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός Καλούμε 1η θεμελιώδη μορφή της S στο σημείο p την τετραγωνική μορφή

$$I_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \quad I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2$$

$$\|w_1+w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + \|w_2\|^2$$
$$I_p(w_1+w_2) = I_p(w_1) + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + I_p(w_2)$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = 1/2 \{ I_p(w_1+w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \}$$

Η I_p είναι θετικώς ορισμένη.

$I_p(w) \geq 0 \quad \forall\, w \in T_pS$ και $I_p(w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$

Έστω $X : U \to S$ σύστημα σ/μένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$ και $p = X(q) \in X(U) \quad q \in U$

Γνωρίζω ότι τα $\{X_u(q), X_v(q)\}$ είναι βάση του T_pS

Ως προς αυτή τη βάση ο πίνακας της I_p είναι

$$\begin{pmatrix} \langle X_u(q), X_v(q) \rangle & \langle X_u(q), X_v(q) \rangle \\ \langle X_u(q), X_v(q) \rangle & \langle X_u(q), X_v(q) \rangle \end{pmatrix}$$

Τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης της S ως προς το $X: U \to S$ είναι οι λείες συναρτήσεις

$E, F, G : U \to \mathbb{R}$ $\qquad E = \langle X_u, X_u \rangle = \|X_u\|^2$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \|X_v\|^2$$

$X_u \times X_v \neq 0$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad E > 0,\ G > 0 \qquad EG - F^2 > 0$$

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_u\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

$w \in T_pS \Rightarrow \exists \quad c(-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U), \quad c(0) = p$

$c'(0) = w \qquad$ Γράφω $\quad c(t) = X(u(t), v(t))$

$$w = c'(0) = u'(0) X_u\underbrace{(u(0), v(0))}_{q} + u'(0) X_v(u(0), v(0))$$

$$I_p(w) = \|u'(0) X_u(q) + u'(0) X_v(q)\|^2 = (u'(0))^2 \|X_u(q)\|^2 + 2u'(0) v'(0) \langle X_u(q), X_v(q) \rangle + (u'(0))^2 \|X_v(q)\|^2$$

$$\boxed{I_p(w) = E(q)(u'(0))^2 + 2F(q) u'(0) v'(0) + G(q)(u'(0))^2}$$

$$\|w\| = \sqrt{I_p(w)} = \sqrt{E(q)(u'(0))^2 + 2F(q) u'(0) v'(0) + G(q)(v'(0))^2}$$

Γωνία Εφαπτομένων

$w_1, w_2 \in T_pS \setminus \{0\}$

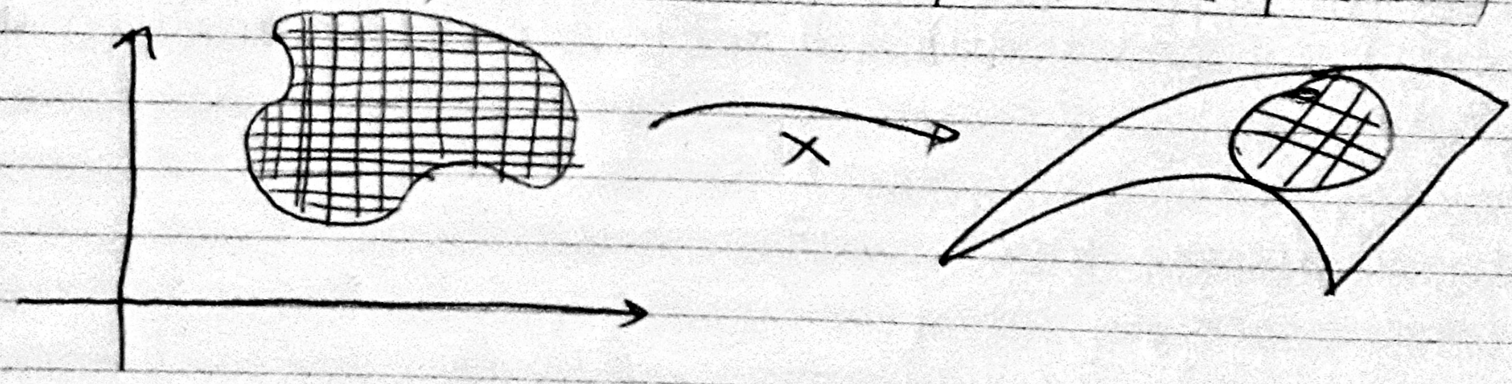
$$\cos\varphi = \langle w_1, w_2\rangle_p / \|w_1\| \|w_2\|_p$$

$$w_1 = a_1 x_u + b_1 x_v$$
$$w_2 = a_2 x_u + b_2 x_v$$

$$\cos\varphi = \frac{\langle w_1, w_2\rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)}\sqrt{I_p(w_2)}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2E(q) + (a_1b_2 + a_2b_1)F(q) + b_1b_2G(q)}{\sqrt{Ea_1^2 + 2Fa_1b_1 + Gb_1^2}\sqrt{Ea_2^2 + 2Fa_2b_2 + Gb_2^2}}$$

$\boxed{\text{Γωνία Τεμνόμενων εφαπτομενικών Καμπυλών}}$



$x(u, v = σταθ)$ $x(u = σταθ, v)$

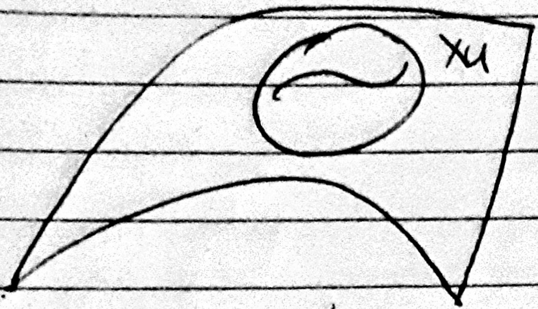
Η γωνία αυτών είναι:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x_u, x_v\rangle}{\|x_u\| \|x_v\|} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Το σ/μα σ/μένων $x: U \to S$ καλείται ορθογώνιο $\iff F=0$

$\iff$ Οι παραμετρικές του καμπύλες $x(u, v=\text{σταθ})$ τέμνονται υπό ορθή $x(u=\text{σταθ}, v)$

Μήκος Επιφανειακής Καμπύλης



$c: I \to x(U)$

$c(t) = x(u(t), v(t))$

$a<b \quad a,b \in I$

από 1^{η} θεμελιώδη μορφή.

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{I(c'(t))}\,dt$$

$$c'(t) = u'(t)\,x_u(u(t), v(t)) + u'(t)\,x_u(u(t), v(t))$$

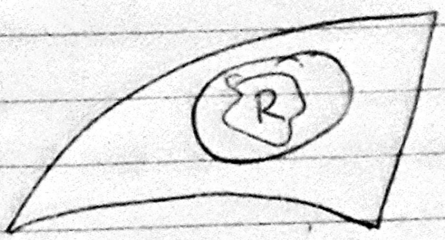
Το μήκος της καμπύλης

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(\dots)u'(t)v'(t) + G(\dots)(u'(t))^2}\,dt$$

Η συνάρτηση μήκος τόξου είναι:

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\|d\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u(\sigma \dots}$$

ΕΜΒΑΔΟ



S $\quad X: U \to$
συστ. συντετ. με παραμέτρους (u,v)

Έστω χωρίο $R \subset X(U)$

ο αριθμός $\iint \|X_u \times X_v\| du\, dv$ καλείται εμβαδό του χωρίου R

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E(R) \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| du\, dv = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Εσωθεν διαφ. γεωμ. της Επιφάνειας

Δυο εσωθεν επιφανειες είναι ίσες όταν έχουν την ίδια 1η θεμελ. Μορφή

Εσωθεν γεωμετρία μιας επιφάνειας S είναι καθε ιδανική γεωμετρία που εξαρτάται μόνο απο την 1η θεμελειώδη μορφή

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Μια απεικόνιση $\phi: S \to \tilde{S}$ καλείται ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ αν-ν

i) Η ϕ είναι διαφορομορφισμός

ii) $\forall\, p\in S$, $\forall\, w\in T_pS$ να ισχύει: $I_p(w) = \tilde{I}_{\phi(p)}(\partial\phi_p(w))$

όπου I και $\tilde{I}$ είναι οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές των S και $\tilde{S}$ αντίστοιχα.

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \frac{1}{2}\left\{ I_p(w_1+w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)\right\}$$

$$\langle \partial\phi_p(w_1), \partial\phi_p(w_2)\rangle_{\phi p} = \dots$$

Συμπέρασμα: Ο διαφορομορφισμός ϕ είναι ισομετρία

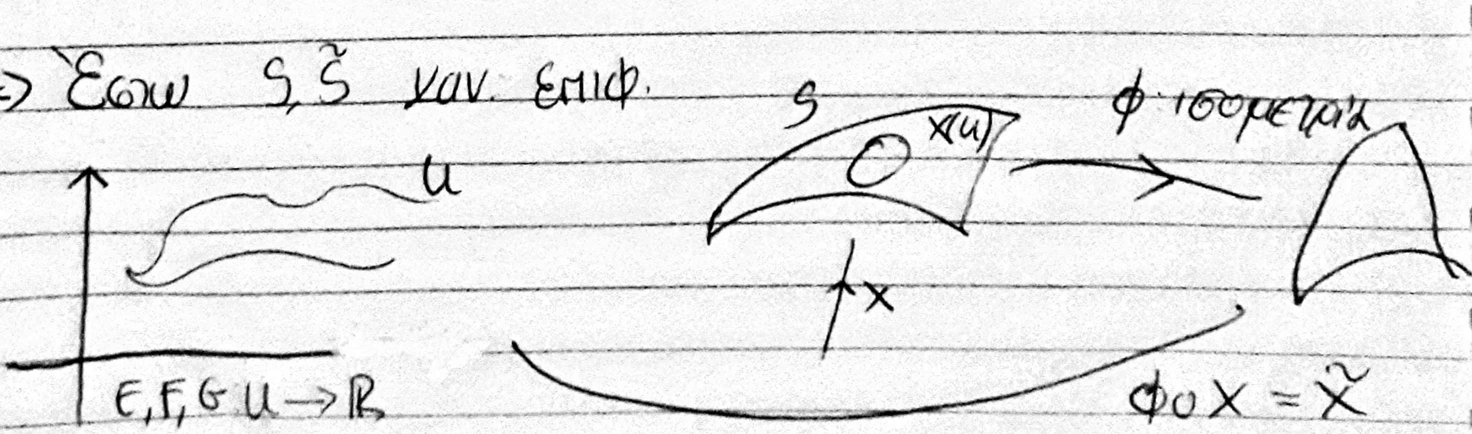
$\iff \langle w_1, w_2\rangle_p = \langle \partial\phi_p(w_1), \partial\phi_p(w_2)\rangle_{\phi p}$

$\forall\, p\in S$

$\forall\, w_1, w_2 \in T_pS$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Η επιφάνεια καλείται ισομετρική της $\tilde{S}$ αν-ν $\exists$ ισομετρία $\phi: S \to \tilde{S}$

$\Rightarrow$ Έστω $S, \tilde{S}$ καν. επιφ.



$E = \|X_u\|^2$, $F = \langle X_u, X_v\rangle$, $G = \|X_v\|^2$

$\tilde{E} = \|\tilde{X}_u\|^2$, $\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v\rangle$, $\tilde{G} = \|\tilde{X}_v\|^2$

$\tilde{x}_u = (\phi \circ x)_u = \partial\phi(x_u)$

$\tilde{x}_u = \partial\phi(x_u)$

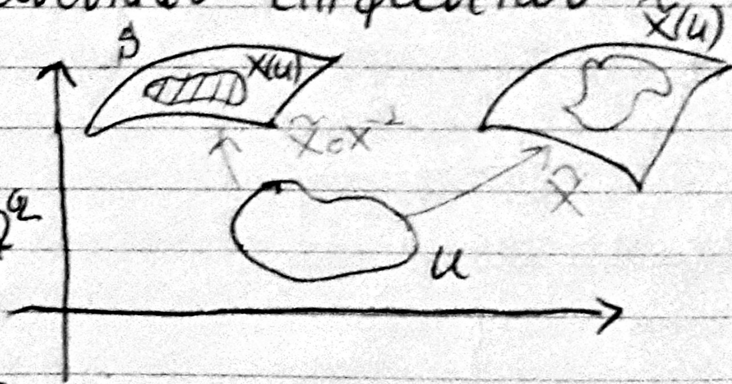
$\tilde{E} = \|\tilde{x}_u\|^2 = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle = \langle \partial\phi(x_u), \partial\phi(x_u) \rangle$

$\quad = \langle x_u, x_u \rangle = \|x_u\|^2 = E$

Αν $\phi: S \to \tilde{S}$ ισομετρία και $x: U \to S$, $\tilde{x} = \phi \circ x: U \to \tilde{S}$ σύστημα συντεταγμένων με κοινές παραμέτρους $(u,v) \in U$ τότε ισχύει

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{F} = F, \quad \tilde{G} = G$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $x: U \to S$, $\tilde{x}: U \to \tilde{S}$ σύστημα συντεταγμένων με κοινές παραμέτρους $(u,v) \in U$. Αν $\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$ Τότε η απεικόνιση $\tilde{x} \circ x^{-1}: x(U) \to \tilde{x}(U)$ είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών $x(U)$, $\tilde{x}(U)$



Απόδ.

Θέτω $\phi = \tilde{x} \circ x^{-1}$

Η ϕ είναι διαφ/μος ως σύνθεση διαφ/μων

$p \in x(U)$, $p = x(q) \Rightarrow \phi(p) = \tilde{x}(q)$

$w \in T_pS$, $w = c'(0)$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$

Μπορώ να γράψω ότι $c(t) = (u(t), v(t))$

$w = c'(0) = u'(0)x_u(q) + u'(0)x_u(q)$

$I_p(w) = E(q)(c'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2$

$$I\ \partial_p(\partial\phi_p(u)) = ?$$

Θεωρώ την $\tilde{c}(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \tilde{X}(U)$, $\tilde{c} = \phi \circ c$

$$\tilde{c}(t) = \tilde{x} \circ x^{-1} \circ c(t) = \tilde{x}(x^{-1}(c(t)))$$

$$\Rightarrow \tilde{c}(t) = \tilde{x}(u(t), v(t))$$

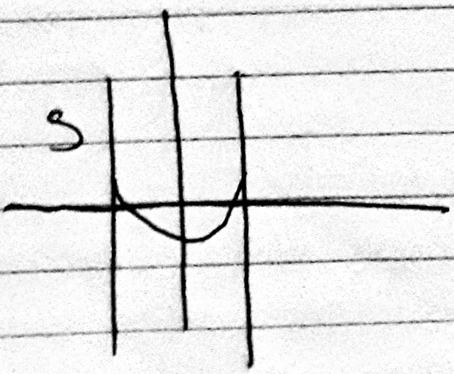
$$\begin{cases} \tilde{c}'(0) = u'(0)\,\tilde{X}_u(q) + v'(0)\,\tilde{X}_u(q) \\ \tilde{c}'(0) = \partial\phi_p(w) \end{cases}$$

$$\partial\phi(w) = u'(0)\,\tilde{X}_u(q) + r'(0)\,\tilde{X}_v(q)$$

$$\tilde{I}_{\phi(p)} \quad (\partial\phi_p(w)) = \tilde{E}(q)(u'(0))^2 + 2\tilde{F}(q)\,u'(0)\,v'(0) + G(q)(v'(0))^2$$

$$I_p(w) = \tilde{I}_{\phi(p)} \quad (\partial\phi_p(w))$$

Παράδειγμα (sos)



$$S: x^2 + y^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x}{r} = \cos\frac{u}{r}, \quad \frac{y}{r} = \sin\frac{u}{r}$$

Ορίζω την $x(0,2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow S$ με $x(u,v) =$

$$= \left(r\cos\frac{u}{r},\ r\sin\frac{u}{r},\ v\right)$$

Ισχυρίζομαι ότι X είναι ωυστημα συντεταγμένων

$X: U \to V \cap S$, $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = r, y = 0\}$

$X_u \times X_v = \dots \neq 0$

Υπολογίζω την $1^{η}$ θεμελιώδη μορφή της S ως προς X

$X_u(u,v) = \left(-\sin\frac{u}{r}, \cos\frac{u}{r}, 0\right)$

$X_u(u,v) = (0,0,1)$

$E(u,v) = \|X_u(u,v)\|^2 = 1$

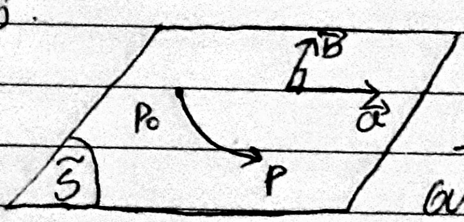
$F(u,v) = \langle X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle = 0$

$G(u,v) = \|X_v\|^2(u,v) = 1$

$$W = aX_u + bX_v$$

$$I_p(w) = a^2 + b^2$$
$$\| \; \text{(=)}$$
$$\|w\|^2$$

$\tilde{S}$ είναι το επίπεδο που διέρχεται το σημείο P_0 και είναι παράλληλο προς τα γραμ ανεξ. διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$.



Υποθέτω ότι $\|\vec{a}\| = 1 = \|\vec{b}\|$ και $\vec{a} \perp \vec{b}$

Η $\tilde{S}$ είναι κανονική με σύστημα συντεταγμένων $\tilde{X} : (0, 2\pi r) \times \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{S}$

$$\tilde{X}(u,v) = P_0 + u\vec{a} + u\vec{b}$$

$$\tilde{X}_u(u,v) = \vec{a}$$

$$\tilde{X}_v(u,v) = \vec{b}$$

$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v(u,v) = \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης της $\tilde{S}$ ως προς το $\tilde{X}$ είναι:

$$\tilde{E} = \|\tilde{X}_u(u,v)\|^2 = \|\vec{a}\|^2 = 1$$

$$\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\tilde{G} = \|\tilde{X}_v\|^2 = \|\vec{b}\|^2 = 1$$

Συμπέρασμα: Κάθε κύλινδρος είναι ΤΟΠΙΚΑ ισομετρικός με επίπεδο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

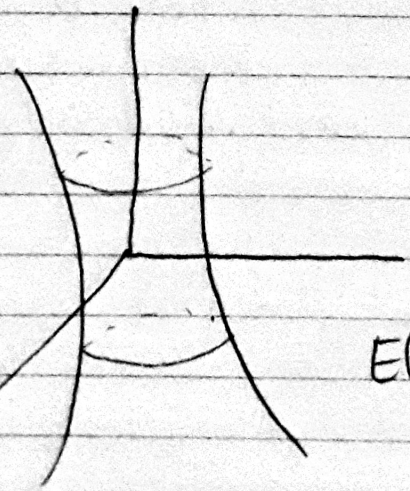
$S: x^2+y^2=a^2\cosh^2\frac{z}{a}$, $a>0$, (Αλυσοειδής)

Προφανώς: $S=f^{-1}(0)$, όπου $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2-a^2\cosh\frac{z}{a}$

$f_x(x,y,z)=2x$, $f_y(x,y,z)=2y$, $f_z(x,y,z)=-2x\cosh\frac{z}{a}\sinh\frac{z}{a}$

Το (x,y,z) είναι κρίσιμο σημείο αν-ν
$x=0$, $y=0$, $z=0$, $(0,0,0)\notin f^{-1}(0)$

$\xRightarrow{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ S κανονική επιφάνεια.



Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων
$X:U\to S$, $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$

$X(u,v)=(a\cosh v\cos u,\ a\cosh v\sin u,\ av)$

$E(u,v)=G(u,v)=a^2\cosh^2 v$, $F(u,v)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\tilde{S}$ είναι η ελικοειδής επιφάνεια, δηλαδή η επιφάνεια με εξίσωση

$$x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$$

$$\tilde{S} = \tilde{f}^{-1}(0), \quad \tilde{f}(x,y,z) = x\sin\frac{z}{a} - y\cos\frac{z}{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_x(x,y,z) &= \sin\frac{z}{a} \\ \tilde{f}_y(x,y,z) &= -\cos\frac{z}{a} \end{aligned}\right| \Rightarrow \nexists \text{ κρίσιμα σημεία} \overset{\text{θεωρ.}}{\Longrightarrow} \tilde{S} \text{ κανονική}$$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u})$$

Οι παραμετρικές καμπύλες $\tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}=\text{σταθ})$ είναι κυλινδρικές έλικες

Οι " " $\tilde{X}(\tilde{u}=\text{σταθ}, \tilde{v}) = (0,0,v\tilde{u}) + \tilde{v}(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0)$

$$\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{v}^2 + a^2, \quad F(\tilde{u},\tilde{v}) = 0, \quad \tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) = 1$$

$$\tilde{v}^2 + a^2 = a^2\cosh^2 v \Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2(\cosh^2 v - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2\sinh^2 v$$

- $\tilde{v} = a\sinh v, \quad \tilde{u} = u$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων $\tilde{\tilde{X}}$

$$\tilde{\tilde{X}}(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

$$\tilde{\tilde{E}}(u,v) = E(u,v)$$

$$\tilde{\tilde{F}}(u,v) = F(u,v)$$

$$\tilde{\tilde{G}}(u,v) = G(u,v)$$